In Fig. 3 the total cross section of the M1 transitions is shown which was obtained with the value $b = 0.024$. The potential used in these calculations was chosen to give the correct phase shifts of the $^4He(^2H, ^2H)^4He$ scattering between 2 and 10 MeV and to reproduce the resonance of the δ_3^2 shift at 1.07 MeV. This cross section is considerably smaller than that for E1 and E2 transitions [2] and thus it can be neglected. The reasons for its smallness are 1) the smallness of the D-state probability in the nucleus ^6Li and 2) an isospin selection rule [5] which diminishes the probability for M1 transitions with $\Delta T = 0$ in self-conjugate nuclei by a factor of about 100.

In the calculations of MAMASAKHLISOV and MACHARADZE [2] a square well potential with a well radius of 3.5 fm is used for the relative motiton. The depth is dependent on the angular momentum of the system $^4He + ^2H$; for the S-state it is 32.34 MeV. This potential is considerably different from the potential used in the present calculations and shown for the S-state in Fig. 1. The effect of the use of this long range potential with a repulsive hard core is mainly to increase those radial matrix elements which contain a power of the relative distance $\underset{\sim}{R}$. So the probability for E2 transitions is increased by a factor of about two in most parts of the energy region between 0 and 4 MeV relative energy of the reaction products. However, in the regions directly ahead and behind the first sharp maximum in the total E2 cross section at about 0.71 MeV, the cross section is diminished by a factor of up to five.

To summarize, we can conclude that the M1 transitions in the reaction (1) are negligible, and thus the asymmetry of the differential cross section is a reliable test for clustering effects in the nucleus ^6Li. On the other hand, the influence of the form of the optical potential used should not be underestimated, because the admixture of E1 transitions is expected to be most important just in the region ahead and behind the first peak in the cross section.

I wish to thank Professor Dr. G. EDER for his help and suggestions. The numerical calculations were performed at the Rechenzentrum der Justus Liebig-Universität, Giessen on a CDC 3300 computer.

[5] G. MORPURGO, Phys. Rev. **110**, 721 [1958].

Zum asymptotischen Verhalten der Lösungen der dreidimensionalen homogenen Wellengleichung

PAUL V. HOYNINGEN-HUENE

Sektion Physik der Universität München
Theoretische Physik

(Z. Naturforsch. **28a**, 11—13 [1973]; eingegangen am 23. Oktober 1972)

On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Three-Dimensional Homogenous Wave Equation

In order to clarify the statement "A solution of the homogenous wave equation, that tends to zero at infinity faster than $1/r$ at all times, must be zero everywhere" three different limits are considered and investigated.

Bei HOYLE und NARLIKAR [1] findet man die Behauptung, daß eine Lösung der homogenen Wellengleichung, die zu allen Zeiten für $r \to \infty$ schneller als $1/r$ gegen null geht, identisch verschwindet. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist für die Wheeler-Feynmansche Elektrodynamik wichtig [2]: Man möchte hier zei-

Sonderdruckanforderungen an Paul v. Hoyningen-Huene, Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich, *CH — 8001 Zürich* (Schweiz).

[1] F. HOYLE u. J. V. NARLIKAR, Proc. Roy. Soc. London A **277**, 1 [1964]. — J. V. NARLIKAR, Pure Appl. Chem. **22**, 449 [1970].
[2] J. A. WHEELER, R. P. FEYNMAN, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945); Rev. Mod. Phys. **21**, 425 [1949].

gen, daß in einem in Vergangenheit und Zukunft absorbierenden Universum das Feld $\sum(F_{\text{ret}}^{(b)} - F_{\text{adv}}^{(b)})$ identisch verschwindet, wobei über alle Teilchen b des Universums zu summieren ist. Man erhält dann Bewegungsgleichungen, die mit den Bewegungsgleichungen der Maxwellschen Elektrodynamik leicht vergleichbar sind.

Die Übersetzung der obigen Behauptung in mathematische Sprache ist nun nicht eindeutig; die verschiedenen Möglichkeiten sollen im folgenden diskutiert werden.

Eine besonders einfache und naheliegende Präzisierung besagt:

$$\Box A(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

und

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbf{R} \tag{I}$$

impliziert

$$A(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{r}, t) \in \mathbf{R}^4.$$

Hier wird behauptet, daß bei festgehaltenem Zeitparameter t (also auf „Momentaufnahmen") ein von null verschiedenes Feld nicht schneller als $1/r$ abfallen kann.

Eine zweite Lesart der Behauptung erhält man, wenn man gewissermaßen mit dem Feld mitläuft und so die Amplituden an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten miteinander vergleicht. Der physikalische Kontext erfordert eben diese Betrachtungsweise, weil damit der Einfluß der Absorption auf die Lösung der Wellengleichung untersucht werden kann. Man hat dann die Feldstärke an einem festen Referenzpunkt, etwa dem Koordinatensprung, mit der Feldstärke bei $(\boldsymbol{r}, t = \pm |\boldsymbol{r}|/c)$ im Grenzwert $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ zu vergleichen; das Minus-Zeichen entspricht dabei dem Zurückverfolgen der Welle in die Vergangenheit. Schnelleres Abfallen als $1/r$ bedeutet dann, daß $|\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}, t = \pm |\boldsymbol{r}|/c)/A(\mathbf{o}, \mathrm{o})$ im Limes $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ verschwindet. Mit $c = 1$ liest sich die zweite Version der Behauptung dann wie folgt:

$$\Box A(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{II}$$

und

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}, |\boldsymbol{r}|) = 0$$

sowie

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}, -|\boldsymbol{r}|) = 0$$

impliziert

$$A(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{r}, t) \in \mathbf{R}^4.$$

Eine dritte Form der Behauptung ergibt sich, wenn man wie bei (II) mit der Welle mitläuft, jedoch als Referenzpunkt zum Vergleich der Amplituden nicht nur den Ursprung zuläßt, sondern beliebige Punkte $(\boldsymbol{r}_0, t_0) \in \mathbf{R}^4$. Man kommt dann zu folgender Vermutung:

$$\Box A(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

und

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}, t_0 + |\boldsymbol{r}|) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{r}_0, t_0) \in \mathbf{R}^4$$

sowie

$$\lim_{|\boldsymbol{r}| \to \infty} |\boldsymbol{r}| A(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}, t_0 - |\boldsymbol{r}|) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{r}_0, t_0) \in \mathbf{R}^4 \tag{III}$$

impliziert

$$A(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \forall (\boldsymbol{r}, t) \in \mathbf{R}^4.$$

Zur Diskussion der Richtigkeit von (I) und (II) betrachte man die Funktion A^* über $\boldsymbol{R}^4$ mit

$$A^*(\boldsymbol{r}, t) = r^{-1}\,[r + t)\, e^{-(r+t)^2} + (r - t)\, e^{-(r-t)^2}],$$

wobei wie üblich $r := |\boldsymbol{r}|$ gesetzt wurde. Dies ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung (Anhang I) und befriedigt offensichtlich die Grenzwertsvoraussetzungen in (I) und (II). Unser Ausdruck $A^*(\boldsymbol{r}, t)$ zeigt also das Gegenbeispiel, daß die Aussagen (I) und (II) falsch sind.

Die Behauptung (III) ist zumindest für kugelsymmetrische $A(\boldsymbol{r}, t)$ richtig (Anhang II); im Hinblick auf die anfangs erwähnte Problemstellung in der Wheeler-Feynmanschen Elektrodynamik genügt der Beweis für kugelsymmetrische Lösungen, da für isotrope Weltmodelle das Feld $\sum(F_{\text{ret}}^{(b)} - F_{\text{adv}}^{(b)})$ diese Symmetrie offensichtlich besitzt.

Es erscheint vielleicht als verwunderlich, daß es trotz der Richtigkeit von (III) für kugelsymmetrische Lösungen ein kugelsymmetrisches Gegenbeispiel zu (II) gibt. Der Grund ist folgender: Der einlaufende Teil von $A^*(\boldsymbol{r}, t)$ steigt wie $1/r$ an (da beim Mitlaufen $r + t = \text{const}$ ist), der auslaufende fällt wie $1/r$ ab. Nun besitzt der einlaufende Teil für $r = -t$, der auslaufende für $r = t$ eine Nullstelle. Bildet man den Quotienten $A^*(\boldsymbol{r}, t = r)/A^*(\mathbf{0}, 0)$, so vergleicht man mit der konstanten Nullpunktsamplitude eine variable Amplitude, zu welcher der eigentlich wie $1/r$ abfallende auslaufende Teil wegen seiner Nullstelle nichts beiträgt. Damit fällt der obige Quotient tatsächlich schneller als $1/r$ ab. Man darf sich daher nicht ohne weiteres auf Amplitudenvergleiche mit nur einem festen Referenzpunkt verlassen, da etwaige Nullstellen der Welle den Wert des obigen Quotienten punktuell reduzieren können.

Anhang I

Die Lösung der homogenen dreidimensionalen Wellengleichung für gegebene Anfangsbedingungen

$$A(\mathbf{r},0) = u_0(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \partial A/\partial t\,(\mathbf{r},0) = u_1(\mathbf{r})$$

lautet [3]:

$$A(\mathbf{r},t) = t\cdot M_1(\mathbf{r},t) + \partial/\partial t\,(t\cdot M_0(\mathbf{r},t)),$$

wobei

$$M_i(\mathbf{r},t) = 1/4\pi \iint_{|\mathbf{n}|=1} u_i(\mathbf{r}+t\cdot\mathbf{n})\,d\omega_n \tag{1}$$

ist mit $i = 0{,}1$.

Für kugelsymmetrische Anfangsbedingungen $u_i(\mathbf{r}) = u_i(|\mathbf{r}|)$ lassen sich die Integrale M_i auswerten:

$$\begin{aligned} M_i(\mathbf{r},t) &= 1/4\pi \iint_{|\mathbf{n}|=1} u_i(r^2+t^2+2t\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})^{\frac12}\,d\omega_n \\ &= 1/4\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\cos\vartheta=-1}^{1} u_i(r^2+t^2+2tr\cos\vartheta)^{\frac12}\,d(\cos\vartheta)\,d\varphi \\ &= \tfrac12 \int_{-1}^{1} u_i(r^2+t^2+2try)^{\frac12}\,dy = 1/4rt\int_{(r-t)^2}^{(r+t)^2} u_i(\sqrt{x})\,dx \\ &= 1/4rt\,[U_i(|r+t|) - U_i(|r-t|)], \end{aligned}$$

wobei

$$dU_i(\sqrt{x}) = u_i(\sqrt{x})\,dx, \quad \text{also} \quad dU_i(r) = 2r\,u_i(r)\,dr \tag{2}$$

ist.

Setzt man die M_i jetzt in (1) ein, so erhält man die allgemeine kugelsymmetrische Lösung der homogenen Wellengleichung. Sie ähnelt der d'Alembertschen Lösung des eindimensionalen Analogfalles und lautet:

$$A(r,t) = 1/4r\,\{U_1(|r+t|) - U_1(|r-t|) + \partial/\partial t\,[U_0(r+t) - U_0(|r-t|)]\}$$

oder

$$A(r,t) = 1/4r\,[U_1(|r+t|) - U_1(|r-t|) + 2(r+t)\,u_0(|r+t|) + 2(r-t)\,u_0(|r-t|)]. \tag{3}$$

Wählt man als Anfangsbedingungen $u_0(r) = 2e^{-r^2}$ und $u_1(r) = 0$, so erhält man $U_0(r) = 2e^{-r} + \text{const}$ und $U_1(r) = \text{const}$ und hat damit

$$A^*(r,t) = (r+t)/r\; e^{-(r+t)^2} + (r-t)/r\; e^{-(r-t)^2} \tag{4}$$

als eine nichttriviale Lösung der homogenen Wellengleichung.

Anhang II

Voraussetzung:

$$\Box A(\mathbf{r},t) = 0, \tag{5}$$

$$A(\mathbf{r},t) = A(|\mathbf{r}|,t), \tag{6}$$

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} |\mathbf{r}|\,A(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}, t_0+|\mathbf{r}|) = 0, \quad \forall(\mathbf{r}_0,t_0)\in\mathbf{R}^4, \tag{7$_+$}$$

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} |\mathbf{r}|\,A(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}, t_0-|\mathbf{r}|) = 0, \quad \forall(\mathbf{r}_0,t_0)\in\mathbf{R}^4. \tag{7$_-$}$$

Behauptung:

$$A(\mathbf{r},t) = 0 \qquad \forall(\mathbf{r},t)\in\mathbf{R}^4.$$

Beweis:

Aus (5) und (6) folgt, daß $A(\mathbf{r},t)$ die Form (3) hat (Anhang I). Die Gleichungen in $(7)_\pm$ lesen sich dann, wenn man $\mathbf{r}$ in der Richtung von $\mathbf{r}_0$ wachsen läßt, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} [\pm U_1(|r_0\pm t_0+2r|) \mp U_1(|r_0\mp t_0|) \\ &\quad + 2(r_0\pm t_0+2r)\,u_0(|r_0\pm t_0+2r|) + 2(r_0\mp t_0)\,u_0(|r_0\mp t_0|)] \\ &= 0, \qquad \forall r_0\geqslant 0,\ t_0\in\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{8$_\pm$}$$

Die von r unabhängigen Summanden können aus dem Limes herausgenommen werden; das ergibt

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} [\pm U_1(|r_0\pm t_0+2r|) + 2(r_0\pm t_0+2r)\,u_0(|r_0\pm t_0+2r|)] \\ &= \pm U_1(|r_0\mp t_0|) - 2(r_0\mp t_0)\,u_0(|r_0\mp t_0|), \\ &\forall r_0\geqslant 0, \quad t_0\in\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{9$_\pm$}$$

Setzt man in $(9)_\pm$ $t_0 := \mp r_0$, so erhält man

$$\lim_{r\to\infty} [\pm U_1(2r) + 4ru_0(2r)] = \pm U_1(2r_0) - 4r_0u_0(2r_0), \quad \forall r_0\geqslant 0. \tag{10$_\pm$}$$

Addition von $(10)_+$ und $(10)_-$ liefert

$$\lim_{r\to\infty} ru_0(2r) = -r_0u_0(2r_0), \qquad \forall r_0\geqslant 0. \tag{11}$$

Da die linke Seite unabhängig von r_0 ist, muß $r_0\,u_0(2r_0)$ eine Konstante sein. Wegen der vorauszusetzenden Differenzierbarkeit von $u_0(\mathbf{r}_0)$ bei $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ folgt, daß die Konstante null ist:

$$u_0(r) = 0, \qquad \forall r\geqslant 0. \tag{12}$$

Substraktion von $(10)_+$ und $(10)_-$ liefert

$$\lim_{r\to\infty} U_1(2r) = U_1(2r_0) \qquad \forall r_0\geqslant 0 \tag{13}$$

und damit

$$U_1(r) = \text{const.} \tag{14}$$

Einsetzen von (12) und (14) in (3) liefert die Behauptung.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. SÜSSMANN und Herrn Dr. W. OCHS für die Anregung dieser Arbeit und hilfreiche Diskussionen.

[3] R. LEIS, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, BI—Hochschultaschenbücher 165/165a [1967].